|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Zentralabitur 2024** | **Mathematik** | **Material für Prüflinge** |
| **Prüfungsteil B – Rechnertyp: CAS** | **Analytische Geometrie - eA** | **Gymnasium Gesamtschule** |

**Name:** \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Klasse:** \_\_\_\_\_\_\_\_

Inhaltsverzeichnis

[Aufgabe 3A (25 BE) 3](#_Toc161748977)

[Aufgabe 3B (25 BE) 7](#_Toc161748978)

# Aufgabe 3A (25 BE)

Abbildung 1 zeigt die Pyramide ABCDS mit den Eckpunkten   
A(-3|-3|0), B(3|-3|0), C(3|3|0), D(-3|3|0) und S(0|0|4) sowie den Punkt O(0|0|0), der in der quadratischen Grundfläche der Pyramide liegt.  
Die Seitenfläche CDS der Pyramide liegt in der Ebene E.

**Abbildung 1**

**S**

**z**

**A**

**B**

**x**

**y**

**O**

**D**

**C**

a) Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche der Pyramide. **[4 BE]**

b) Bestimmen Sie eine Gleichung von E  
in Koordinatenform.  
 **[3 BE]**

c) Es gibt einen Punkt P(0|0|p), der im Innern der Pyramide liegt und von allen vier Seitenflächen sowie der Grundfläche der Pyramide den gleichen Abstand hat. Mithilfe des folgenden Gleichungssystems lässt sich der Wert von p bestimmen:

I \vec{OQ} ={\va 0 \\ 0 \\ p \ve} +t \*{\va 0 \\ 4 \\ 3 \ve}

II 4 \*4t +3 \*(p +3t) =12

III |\vec{PQ}| =p

Geben Sie die geometrische Bedeutung dieser Gleichungen an. **[5 BE]**

Die Ebene E gehört zur Schar der Ebenen  
E\_k: 4k \*x +4\sqrt{1 -k^2} \*y +3 \*z =12 mit k \in [-1;1].

Die Seitenfläche ADS der Pyramide liegt in der Ebene E\_{-1} der Schar, die Seitenfläche BCS in der Ebene E\_1.

d) Zeigen Sie, dass der Punkt S in allen Ebenen der Schar enthalten ist. **[2 BE]**

e) Weisen Sie nach, dass die Größe des Winkels, unter dem die Gerade OS die Ebene E\_k schneidet, unabhängig von k ist.

Bestimmen Sie die Größe dieses Winkels. **[5 BE]**

Jede Ebene E\_k der Schar schneidet die xy-Ebene in einer Gerade g\_k. Mit R\_k wird jeweils derjenige Punkt  
auf bezeichnet, der von O den kleinsten Abstand hat. In Abbildung 2 sind g\_k und R\_k beispielhaft für eine Ebene E\_k der Schar dargestellt.

**Abbildung 2**

**S**

**z**

**A**

**B**

**x**

**y**

**O**

**D**

**C**

**R\_k**

**g\_k**

f) Zeichnen Sie die Punkte R\_{-1} und R\_1 in  
Abbildung 2 ein. **[3 BE]**

g) Durchläuft k alle Werte von -1 bis 1, dann dreht sich die Fläche OR\_kS um die Strecke \overline{OS}. Dabei entsteht ein Körper.

Beschreiben Sie die Form des entstehenden Körpers und bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers. **[3 BE]**

# Aufgabe 3B (25 BE)

Abbildung 1 zeigt modellhaft eine Terrasse, die von zwei Hauswänden und einer Rasenfläche begrenzt wird. Ebenfalls dargestellt ist ein ausfahrbares Sonnendach, im Folgenden als Markise bezeichnet. Der horizontale Boden, zu dem die Terrasse und die Rasenfläche gehören, wird im abgebildeten Koordinatensystem durch die x\_1x\_2-Ebene dargestellt.   
Die Terrasse wird durch das Fünfeck mit den Eckpunkten A(0│0│0), B(3│0│0), C(3│3│0), D(2│5│0) und E(0│5│0) beschrieben.

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht dabei 1 m in der Realität.

**Hauswand 1**

**Hauswand 2**

**Abbildung 1**

**Markise**

**Terrasse**

**Rasen**

Q

R

A

B

C

D

S

P

E

x\_1

x\_2

x\_3

a) Bestimmen Sie die Gesamtlänge der an die Terrasse angrenzenden Rasenkanten sowie den Flächeninhalt der Terrasse. **[6 BE]**

Die Befestigung der Markise an der Hauswand 2 hat  
die Endpunkte P(0|5|2,3) und Q(0|0|2,3).

Ist die Markise vollständig ausgefahren, sind ihre weiteren Eckpunkte R(2,4|0|1,9) und S(2,4|5|1,9).  
Die Markise ist rechteckig und liegt im Modell in  
der Ebene M mit der Gleichung x\_1 +6x\_3 =13,8.

b) Das zu einem bestimmten Zeitpunkt auf die Terrasse einfallende Sonnenlicht wird durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor   
{\va 0,92 \\ 0 \\ -2 \ve} beschrieben.  
Untersuchen Sie, ob zu diesem Zeitpunkt bei vollständig ausgefahrener Markise mehr als die Hälfte der Terrassenfläche im Schatten liegt.  
**[7 BE]**

Abbildung 2 zeigt die Oberseite der Markise mit ihren beiden gestrichelt dargestellten Gelenkarmen.

Der rechte Gelenkarm besteht aus der oberen Stange \overline{PG\_k}, einem Gelenk im Punkt G\_k und einer unteren Stange \overline{G\_kS\_k}. Die obere und die untere Stange sind gleich lang. Beim Ausfahren der Markise verändern sich die Positionen der Punkte G\_k und S\_k.

Q

P

S\_k

G\_k

**obere Stange**

**untere Stange**

**Abbildung 2**

Die obere Stange wird beschrieben durch  
o\_k: \vec{x} ={\va 0 \\ 5 \\ 2,3 \ve} +\lambda \*{\va 2,4 \\ -0,8 \\ -0,4 \ve}  
mit  
\lambda \in \mathds{R} und 0,04 \le k \le 1.  
Je größer k ist, desto weiter ist die Markise ausgefahren.  
Für k =1 ist sie vollständig ausgefahren und für k =0,04 ist sie vollständig eingefahren.

c) Zeigen Sie, dass alle Geraden   
in der Ebene M mit x\_1 +6x\_3 =13,8 liegen. **[4 BE]**

d) Die folgende Rechnung liefert die Größen zweier Winkel:

cos(\alpha) =\frac{|{\va 0 \\ 1 \\ 0 \ve} \circ {\va 2,4 \\ -0,8 \\ -0,4 \ve}|}{|{\va 0 \\ 1 \\ 0 \ve}| \*|{\va 2,4 \\ 0,84 \\ -0,4 \ve}|} liefert \alpha \apx 71,8° und damit \beta =2 \*\alpha \apx 143,6°.

Geben Sie die Bedeutung von \alpha und \beta im Sachzusammenhang an. **[3 BE]**

e) Sowohl die obere als auch die untere Stange des Gelenkarms sind 1,28 m lang.

Bestimmen Sie die Koordinaten von G\_k für k =0,5.  
**[5 BE]**

#### Gesamtergebnis

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Aufgabe** | **Mögliche Punkte** | **Erreichte Punkte** |
| **3A** | **25 BE** |  |
| **a)** | **4 BE** |  |
| **b)** | **3 BE** |  |
| **c)** | **5 BE** |  |
| **d)** | **2 BE** |  |
| **e)** | **5 BE** |  |
| **f)** | **3 BE** |  |
| **g)** | **3 BE** |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **3B** | **25 BE** |  |
| **a)** | **6 BE** |  |
| **b)** | **7 BE** |  |
| **c)** | **4 BE** |  |
| **d)** | **3 BE** |  |
| **e)** | **5 BE** |  |